中国海洋大学 2021 年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 856　　　　**科目名称：** 高等代数

一、填空题（每空 5 分，共 40 分。）

1. 若多项式$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+k$有重根，则 $k=$______。

2. 设A,B,C分别为$k\times k$，$l\times l$，$s\times s$阶矩阵，且其行列式分别为$|A|=2,|B|=3,$

   $|C|=\frac{1}{6}$，则行列式$\begin{vmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{vmatrix}=$______。

3. 已知向量组$\alpha_1=(1,4,3)^T$，$\alpha_2=(2,t,-1)^T$，$\alpha_3=(-2,3,1)^T$ 线性相关，则

   $t=$______。

4. 设$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$，则方程$f(x)=0$的根的个数

   为______。

5. 设$\alpha_1=(1,1,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,1,1)$，$\beta_1=(0,0,1,1)$，$\beta_2=(0,1,1,0)$，$V_1=L(\alpha_1,$

   $\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，则$\dim(V_1\cap V_2)=$______。

6. 设P是数域，已知向量空间P^3上的线性变换T为：$T(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,$

   $a+b-2c)$，$\forall(a,b,c)\in P^3$。则值域T（P^3）的维数为______。

7. 矩阵$\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$的若当标准形为______，　有理标准形为______。

二、（15 分）　（1）写出$x^3-1=0$的全部根。

（2）设$(x^2+x+1)|[f_1(x^3)+xf_2(x^3)]$，证明：$(x-1)|f_1(x)$，且$(x-1)|f_2(x)$。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上无效。

三、（15 分） 已知：线性方程组（*）如下：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ -x_1 + x_5 = a_5 \end{cases} \qquad (*)$$

（1）证明：（*）有解当且仅当$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$；

（2）在（*）有解的情况下，求出其通解。

四、（15 分）设实矩阵A的伴随矩阵为$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且$AXA^{-1} = XA^{-1} + 3E_4$，

E_4是四阶单位矩阵。计算矩阵X。

五、（20 分）已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$经过某一正交变换化为了$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$，求：

（1）a的值；　　　　　　（2）所用正交变换。

六、（20 分）设τ为线性空间V的一个线性变换，$\tau^2 = \tau$。设V_0是特征值 0 对应的特征子空间，V_1表示特征值 1 对应的特征子空间。证明：

（1）$V_0 = \tau^{-1}(0)$，$V_1 = \tau V$；　　　　（2）$V = V_0 \oplus V_1$ 。

七、（15 分） 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$有特征值$\pm 1$，问：

A是否可对角化？说明理由。

八、（10 分） 设V是欧几里得空间，U是V的一个子空间，$\alpha \in V$，β是α在U上的正交投影。证明：对$\forall \gamma \in U$，都有$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma|$。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上无效。