中国海洋大学2018年硕士研究生招生考试试题

科目代码：856　　科目名称：高等代数

一. 填空题(60分，每题6分)

1. $f(x)=x^4+mx^2-px+2$ 能被 $g(x)=x^2+3x+2$ 整除，则 $m=$____，$p=$____。

2. n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots a^2 & 2a \end{vmatrix}=$______.

3.已知 $x^3+2x^2+px+1=0$ 的三根成等比数列，则 $p=$____。

4. 三阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为3维列向量，且已知 $|A|=1$，令 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，则 $|B|=$______.

5. 设 A,B 皆为4阶方阵，且秩 $r(A)=4,r(B)=3$，则矩阵 A^*B^* 的秩为______.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正惯性指数为______，负惯性指数为______.

7. R^4 的子空间 $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+2x_2-x_4=0\}$ 的维数是______，一组基为________________。

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$____，$y=$____。

9. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 都是三维线性空间 V 的基，且 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_3,β_2 的过渡矩阵为__________。

10. α_1,α_2 是二维欧氏空间 V 的一组基，其度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，则空间 V 的一组标准正交基为__________________。

二.（20 分）a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0\\ bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0\end{cases}$ 仅有零解？有非零解？有非零解时，求通解.

三.（20 分）设 P^4 的两个子空间 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(-1,1,1,1)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\beta_1=(2,-1,0,1)$，$\beta_2=(1,-1,3,7)$。求 W_1+W_2 与 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。

四.（15 分）设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 是一实二次型，若有实 n 维向量 X_1,X_2 使 $X_1'AX_1>0$，$X_2'AX_2<0$。证明：必存在 n 维向量 $x_0\neq\vec{0}$，使 $X_0'AX_0=0$。

五.（20 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 有解但不唯一。求：（1）a 的值；（2）正交矩阵 Q，使 $Q'AQ$ 为对角阵.

六.（15 分）设 V 是复数域上的 n 维线性空间，线性变换 σ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

的矩阵是一若当块 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$。证明：

1）V 中包含 e_1 的 σ-子空间只有 V 自身；

2）V 中任一非零 σ-子空间都包含 e_n；

3）V 不能分解成两个非平凡的 σ-子空间的直和。