中国海洋大学2020年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 856 **科目名称：** 高等代数

一、填空题（每题5分，共40分。）

1. 若多项式$f(x)$除以$x-2$的余式为3，除以$x-3$的余式为4，则$f(x)$除以x^2-5x+6的余式是________。

2. 设四阶行列式D_4的第三行元素为-1，0，2，3，第四行元素对应余子式分别为5，10，a，5，则$a=$_______。

3. 设α，β，γ_2，γ_3，γ_4皆为四维行向量，四阶矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\\gamma_3\\3\gamma_4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\2\gamma_4\end{pmatrix}$，且行列式$|A|=2$，$|B|=1$，则行列式$|2A-B|=$_______。

4. 若实对称矩阵A与矩阵$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$合同，则二次型$X'AX$的正惯性指数为__________。

5. t满足________时，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+2x_2{}^2+(1-t)x_3{}^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$是正定的。

6. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是3维向量空间的两组基，若向量$\gamma$在这两组基下的坐标分别为$(x_1,x_2,x_3)'$与$(y_1,y_2,y_3)'$，且$y_1=x_1,y_2=x_1+x_2,y_3=x_1+x_2+x_3$，则由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$M=$__________。

7. 已知P是数域，向量空间P^3上的线性变换σ为：对$\forall(a,b,c)\in P^3$，有$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$，则变换$\sigma$的秩是_________。

8. 在二维实向量空间R^2中定义内积如下：对$\forall X=(x_1,x_2)\in R^2$，$\forall Y=(y_1,y_2)\in R^2$，

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

有$(X,Y)=3x_1y_1+x_2y_2$。则向量$\alpha=(1,1)$，$\beta=(0,2)$的夹角余弦为$\cos<\widehat{\alpha,\beta}>$ $=$________。

二、(15 分）设$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots\big(x-(2n-1)\big)+1$,其中n为大于1的非负整数。

证明：f(x)在有理数域上不可约。

三、(共 15 分）设A为n阶方阵。证明：

(1)(10 分）若k是正整数，α是$A^{k+1}X=0$的解，而不是$A^kX=0$的解，则

α，$A\alpha, A^2\alpha,\cdots,A^k\alpha$ 线性无关；

(2)(5 分）当正整数$k\geq n$时,必有秩(A^{k+1})=秩(A^k)。

四、(共 15 分）设矩阵A的伴随矩阵为$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$。

(1)(5 分）计算行列式$|A|$。　　(2)(10 分）求矩阵B。

五、(15 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\a_1&b&2&0\\a_2&b_1&c&2\end{pmatrix}$与对角矩阵相似。问：$a,a_1,a_2,b,b_1,c$ 满足什么条件？

六、(共 30 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}$。

(1)(9 分）求出A的特征矩阵的等价标准形；

(2)(9 分）写出A的不变因子、行列式因子、初等因子；

(3)(6 分）写出A的特征多项式和最小多项式；

(4)(6 分）写出A的若当标准形与有理标准形。

七、(20 分）设f是n维欧几里得空间V的对称变换。证明：f的像子空间Imf是f的核子空间Kerf的正交补。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。