中国海洋大学2021年硕士研究生招生考试试题

科目代码：617　　　　科目名称：数学分析

(本试卷共十道大题, 满分150分)

一、 计算题(要求有计算过程, 共5题, 每题10分, 共50分).

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^x)+2\sin x}{\sqrt{1+2x}-\cos x}$.
2. 求二元函数$\ln\left(1+x^2+y^2\right)$在$(0,0)$到4阶项的Peano余项的Taylor公式.
3. 设Σ是曲面$z=x^2+y^2$介于$0\le z\le 1$的部分, 计算第一类曲面积分$I=\iint_\Sigma |xy|dS$.
4. 设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧, 计算第二类曲面积分
$$I=\iint_\Sigma \frac{dxdy}{\cos^2 z}+\frac{dydz}{x\cos^2 x}.$$
5. 令$f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$, 求$\int_0^\pi f(x)dx$.

二、 (10分) 证明不等式: $\tan x+2\sin x>3x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

三、 (10分) 设$\alpha\ne 0$, 计算广义积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(1+\alpha^2x^2\right)^2}$.

四、 (15分) 设$D=\{(x,y,z):x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0,x+y+z\le 1\}$, 已知变换　$x=u(1-v)$, $y=uv(1-w)$, $z=uvw$将D变为uvw空间中的区域为D'.

1. 试表示出区域D', 并计算Jacobi行列式$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$;
2. 计算三重积分$I=\iiint_D \cos(x+y+z)^3dxdydz$.

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

五、 (10分) 设函数$f(x)$在区间(x_0-1,x_0+1)上连续, 除x_0点之外可导, 且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$. 求证: $f'(x_0)$存在, 且$f'(x_0)=A$.

六、 (10分) 已知$f(x)$在点$x=0$处连续, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(x)}{x}=A$. 证明$f(x)$在点$x=0$可导并求$f'(0)$.

七、 (15分) 1. 设$a>1$, 求$f(x)=(a^x+1)^{-\frac{1}{x}}$在区间$[1,a]$上的最大值与最小值.

2. 求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}$.

八、 (10分) 设$f(x)$在$[a,b]$上可导, 且$\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx=f(b)$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$.

九、 (10分) 设区间I上的连续函数列$\{f_n(x)\}$满足条件: (1) $f_n(x)$在I上一致收敛于$f(x)$; (2) 对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$x\in I,y\in I$且$|x-y|<\delta$时, 对所有自然数$n$, 恒有$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 证明$f(x)$在$I$上一致连续.

十、 (10分) 已知$f'(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 且$\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$收敛. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\cos nx dx=0.$$

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。